Análisis Funcional
Evaluación 3. Soluciones

Ejercicio 1. Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $A \subset X$ tal que $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$ verificando que $\{T_n x\}$ es una sucesión de Cauchy para todo $x \in A$, y existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{T_n\}$ es puntualmente convergente, y que definiendo para todo $x \in X$, $Tx = \lim \{T_n x\}$, se verifica que $T \in L(X,Y)$.

Solución. Como en un espacio de Banach las sucesiones convergentes coinciden con las sucesiones de Cauchy, las hipótesis hechas implican que para todo $a \in A$ la sucesión $\{T_n(a)\}$ es convergente. Ahora, si $b \in \mathrm{Lin}(A)$, es decir, $b = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$ con $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $a_k \in A$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, puesto que $T_n(b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_n(a_k)$, deducimos que $\{T_n(b)\}$ es convergente por ser combinación lineal de sucesiones convergentes. Para $x \in X$ y $b \in \mathrm{Lin}(A)$, pongamos:

$$
\begin{aligned}
\|T_n(x) - T_m(x)\| &\leqslant \|T_n(x) - T_n(b)\| + \|T_n(b) - T_m(b)\| + \|T_m(b) - T_m(x)\| \leqslant \\
&\leqslant (\|T_n\| + \|T_m\|)\|x - b\| + \|T_n(b) - T_m(b)\| \leqslant \\
&\leqslant 2M\|x - b\| + \|T_n(b) - T_m(b)\|
\end{aligned}
$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, como $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$, hay algún $b \in \mathrm{Lin}(A)$ tal que $\|x - b\| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Una vez fijado dicho elemento b, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geqslant n_0$ se verifique que $\|T_n(b) - T_m(b)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para todos $n, m \geqslant n_0$ se verifica que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant 2M\|x - b\| + \|T_n(b) - T_m(b)\| < \varepsilon$$

Hemos probado que $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Banach Y, luego es convergente.

Definamos $T : X \to Y$ por $T(x) = \lim \{T_n(x)\}$ para todo $x \in X$. La aplicación T así definida es claramente lineal, y como para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\|T_n(x)\| \leqslant M\|x\|$, deducimos:

$$\|T(x)\| = \|\lim \{T_n(x)\}\| = \lim \{\|T_n(x)\|\} \leqslant M\|x\|$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la continuidad de la norma. Luego $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ lo que prueba que T es continua. ☺

Comentarios. Este ejercicio, muy parecido a uno hecho en clase, lo hacéis bien casi todos. Algunos, pocos, dicen que la sucesión $\{T_n\}$ es de Cauchy lo que indica bastante despiste, o afirman (cosa que es cierta pero no hace falta para nada en este ejercicio) que el espacio $L(X,Y)$ es completo. Bastantes dan como evidente la continuidad del operador T. No lo es porque la continuidad de una función que es límite puntual de una sucesión de funciones continuas no está garantizada. Claro, es inmediato probar la continuidad de T, pero debe hacerse y comentar que se usa la continuidad de la norma. Algunos escriben $\lim \|T_n\|$, eso no es correcto porque la sucesión $\{\|T_n\|\}$ no tiene por qué ser convergente. En este ejercicio hay que tener claro que la convergencia de la sucesión $\{T_n\}$ es *convergencia puntual* no convergencia en $L(X,Y)$. Y algunos pocos las confunden e incluso hay quien prueba que la sucesión $\{T_n\}$ converge a T en $L(X,Y)$. Lo hacen como sigue. Después de probar la convergencia puntual y definir T, dicen: en la desigualdad $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon$ válida para todo $m, n \geqslant n_0$, fijamos $n \geqslant n_0$ y tomamos límite para $m \to \infty$ con lo cual obtenemos $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \varepsilon$ siempre que $n \geqslant n_0$, y concluyen que $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$. ¿Necesitas que te explique dónde está el error? Si no lo ves de inmediato tienes que repasar el concepto de convergencia uniforme y el significado de la convergencia en $L(X,Y)$.

Lo que me ha llamado la atención en este ejercicio, y en general, es la poca importancia que muchos dais a explicar correctamente lo que hacéis, parece que os diera pereza escribir unas pocas palabras para despejar posibles ambigüedades, y eso hace que quien evalúa se quede a veces con la duda de si quien se expresa de esa forma tan concisa, sin explicar mínimamente lo que hace o explicándolo de forma confusa, entiende realmente lo que ha escrito. En este ejercicio me parece importante precisar que *primero* se fija el punto $b \in \operatorname{Lin}(A)$ y *después* se considera la sucesión $\{T_n(b)\}$. Quienes así lo hacen marcan una diferencia con quienes no porque demuestran que entienden bien el proceso. Todo esto tiene que ver con el ingrato trabajo de evaluar, a los profesores nos disgusta vernos en la necesidad de tener que interpretar lo que no está claramente escrito porque queda la duda de si lo hacemos correctamente.

Ejercicio 2. Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define el funcional $\varphi : \ell_1 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(n) \quad (x \in \ell_1)$$

Indica una condición que debe cumplir la sucesión $a \in \ell_\infty$ para que φ alcance su norma.

Solución. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a(n)x(n)| \leqslant \|a\|_\infty |x(n)|$, y para $x \in \ell_1$ la serie $\sum |x(n)|$ converge, deducimos que la serie que define a $\varphi(x)$ es convergente. Tenemos que

$$|\varphi(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)||x(n)| \leqslant \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|a\|_\infty \|x\|_1 \quad \forall x \in \ell_1$$

Deducimos que φ es un funcional lineal continuo y $\|\varphi\| \leqslant \|a\|_\infty$. Representando, como es habitual, por e_n a los vectores unidad, tenemos que $\varphi(\mathrm{e}_n) = a(n)$ y, como $\|\mathrm{e}_n\|_1 = 1$, deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\|\varphi\| \geqslant |a(n)|$, luego $\|\varphi\| \geqslant \|a\|_\infty$. Hemos probado así que $\|\varphi\| = \|a\|_\infty$.

Es evidente que si existe algún $q \in \mathbb{N}$ tal que $|a(q)| = \|a\|_\infty$, es decir, que el supremo que define $\|a\|_\infty$ es de hecho un máximo, entonces tenemos que $\|\varphi\| = |a(q)| = |\varphi(\mathrm{e}_q)|$ y el funcional φ alcanza su norma. Esta es una condición suficiente. También es necesaria porque si existe algún $z \in \ell_1$ con $\|z\|_1 = 1$ tal que $|\varphi(z)| = \|\varphi\|$ entonces

$$\|a\|_\infty = \|\varphi\| = |\varphi(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)||z(n)| \leqslant \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| = \|a\|_\infty$$

Lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)||z(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \|a\|_\infty |z(n)| \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \big(\|a\|_\infty - |a(n)|\big)|z(n)| = 0$$

Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $0 \leqslant \|a\|_\infty - |a(n)|$, debe cumplirse que $\big(\|a\|_\infty - |a(n)|\big)|z(n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z \neq 0$, debe existir algún $q \in \mathbb{N}$ tal que $z(q) \neq 0$, lo que implica que $|a(q)| = \|a\|_\infty$. Por tanto la condición suficiente antes obtenida es también necesaria. ☺

Comentarios. En este ejercicio, todos, con alguna excepción, calculáis la norma de φ correctamente (cosa que ya hicimos al estudiar el dual de ℓ_1) e indicáis que si el supremo que define $\|a\|_\infty$ es de hecho un máximo el funcional φ alcanza su norma, pero son bastantes los que no hacen casi nada más porque o bien no comprueban que dicha condición es necesaria o lo intentan pero lo hacen de manera muy confusa y con afirmaciones extrañas. Creo que ello se debe a que no se ha entendido bien lo que se pide en el ejercicio *"Indica una condición que debe cumplir la sucesión $a \in \ell_\infty$ para que φ alcance su norma"*, aunque yo creo que está claro porque *"condición que debe cumplirse"* significa una condición necesaria. También se debe a que no se interpreta correctamente el significado de que $\big(\|a\|_\infty - |a(n)|\big)|z(n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las afirmaciones extrañas a las que antes me refería, que se repiten mucho, son del tipo siguiente. Después de llegar a que tiene que ser $\big(\|a\|_\infty - |a(n)|\big)|z(n)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, muchos dicen a continuación (copio casi literalmente lo que bastantes de vosotros habéis escrito):

Si **suponemos** que $\exists m\in\mathbb{N}$ tal que $\|a\|_\infty = |a(m)|$ para $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{m}$, entonces

$$x = \frac{|a(m)|}{a(m)}\,\mathrm{e}_m \in \ell_1 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{|a(m)|}{a(m)} a(m) = |a(m)| = \|\varphi\|_\infty$$

Llama la atención ese *suponemos* y el muy extraño añadido *para* $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{m}$. Quienes escriben esto, y son una docena, no se dan cuenta de que al calcular la norma de φ ya habían visto que $\varphi(\mathrm{e}_m) = a(m)$, porque si no ¿a qué viene considerar ahora el vector $x = \frac{|a(m)|}{a(m)}\,\mathrm{e}_m$ para volver a obtener lo que ya se sabe? Quienes así proceden no deducen de las igualdades $\big(\|a\|_\infty - |a(n)|\big)|z(n)| = 0$ una condición necesaria para que el funcional alcance su norma.

Quiero llamar la atención sobre un punto que debe quedar claro. Muchos escribís $\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)||z(n)| = \sum_{n=1}^{\infty}\|a\|_\infty|z(n)|$ y seguidamente afirmáis que debe ser $|a(n)||z(n)| = \|a\|_\infty|z(n)|$, en este caso eso es correcto porque $0 \leqslant \|a\|_\infty - |a(n)|$ pero, en general, dos series pueden tener la misma suma y sus términos pueden ser muy diferentes, lo mismo que pasa con las sucesiones, dos sucesiones con igual límite no tiene por qué ser iguales (¿quizás ya algunos sabéis que series y sucesiones son la misma cosa?).

Ejercicio 3. Dada una sucesión acotada, $a \in \ell_\infty$, se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$, donde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por

$$[Tx](n) = a(n)x(n) \quad (x\in\ell_p, n\in\mathbb{N})$$

a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?

b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, existe un número $r > 0$ tal que $|a(n)| \geqslant r$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Solución. a) Consideremos que $1 \leqslant p < \infty$. Puesto que para todo $n\in\mathbb{N}$, $|a(n)x(n)|^p \leqslant \|a\|_\infty^p |x(n)|^p$, y para $x \in \ell_p$ la serie $\sum|x(n)|^p$ converge, deducimos que la serie $\sum|a(n)x(n)|^p$ es convergente y se verifica la desigualdad

$$\|Tx\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty}|a(n)x(n)|^p \leqslant \|a\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p = \|a\|_\infty^p\|x\|_p^p \quad \forall x\in\ell_p$$

Deducimos que T es un operador lineal continuo y $\|T\| \leqslant \|a\|_\infty$.

Representando, como es habitual, por e_n a los vectores unidad, tenemos que $T(\mathrm{e}_n) = a(n)\,\mathrm{e}_n$ y, como $\|\mathrm{e}_n\|_p = 1$, deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\|T\| \geqslant |a(n)|$, luego $\|T\| \geqslant \|a\|_\infty$. Hemos probado así que $\|T\| = \|a\|_\infty$.

En el caso $p = \infty$, para todo $x \in \ell_\infty$ tenemos que $|[Tx](n)| = |a(n)x(n)| \leqslant \|a\|_\infty\|x\|_\infty$, luego $Tx \in \ell_\infty$ y $\|Tx\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty\|x\|_\infty$, lo que prueba que T también es en este caso un operador lineal continuo y $\|T\| \leqslant \|a\|_\infty$. Si consideramos la sucesión e_0 constante igual a 1, tenemos que $\|\mathrm{e}_0\|_\infty = 1$ y $T(\mathrm{e}_0) = a$, luego $\|T\| = \|a\|_\infty$ y, además, T alcanza su norma.

b) Consideremos en lo que sigue $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Esta claro que T es el operador de multiplicación por a, esto es, $Tx = ax$ (producto de dos sucesiones $[ax](n) = a(n)x(n)$). Esto nos da una pista sobre el posible inverso de T. Notaremos $T = T_a$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|a(n)| \geqslant r$. En tal caso, la sucesión $b = \frac{1}{a}$ está acotada, $b\in\ell_\infty$, y, por lo visto en el punto anterior, el operador $T_b : \ell_p \to \ell_p$ definido por $T_b(x) = bx$ es continuo. Puesto que, evidentemente, $T_a(T_b(x)) = abx = x = bax = T_b(T_a(x))$ para todo $x\in\ell_p$, el operador T_b es el operador inverso de T_a y por tanto T_a es un isomorfismo topológico.

Recíprocamente, si T_a es un isomorfismo topológico y S es su inverso, como $T_a(\mathrm{e}_n) = a(n)\,\mathrm{e}_n$ deducimos que $\mathrm{e}_n = a(n)S(\mathrm{e}_n)$, por lo que $a(n) \neq 0$ y $S(\mathrm{e}_n) = \frac{1}{a(n)}\,\mathrm{e}_n$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{1}{|a(n)|} = \|S(\mathrm{e}_n)\|_p \leqslant \|S\|\|\mathrm{e}_n\|_p = \|S\|$$

Como, evidentemente, $S \neq 0$, obtenemos que $|a(n)| \geqslant \frac{1}{\|S\|}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Comentarios. En este ejercicio ¡tan sencillo! hay notables despistes y una colección de llamativos errores que, como suele ser habitual con los errores, se repiten bastante con casi las mismas palabras y símbolos, lo que me parece muy significativo. Algo que no sé cómo calificar consiste en introducir una extrañísima constante $M = \text{ínf}\,\{K_i \in \mathbb{R} : |a(n)| \leqslant K_i\}$ en la acotación

$$\|Tx\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^p |x(n)|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^p |x(n)|$$

Quienes así lo hacen, y son bastantes, no pueden entender absolutamente nada de lo que escriben. Lo han copiado de algún texto sin pensar lo que copiaban. De hecho, ni siquiera hay unanimidad para definir esa sorprendente constante y hay pequeñas variantes:

$$M = \text{ínf}\,\{K_1 \in \mathbb{R} : |a(n)| < K_1\}\,; \quad M = \text{ínf}\,\{K \in \mathbb{R} : |a(n)| < K\}\,; \quad M = \text{ínf}\,\{K \in \mathbb{R} : |a(n)| \leqslant K\}$$

Me pregunto si quienes escriben esto conocen el concepto de supremo, porque un supremo es un *mínimo mayorante*. Considerar el ínfimo de los mayorantes de un conjunto es impropio de un estudiante de tercer curso porque indica que no entiende el concepto de supremo y no tenía que estar en tercero sino en primero. Eso, sin considerar que el conjunto M está disparatadamente definido. No se puede hacer peor.

Algunos, bastantes, en la hipótesis de que T tiene un inverso continuo T^{-1}, hacen lo que sigue: $x \in \ell_p$, $z = Tx$:

$$\|T^{-1}(z)\|_p = \|T^{-1}(T(x))\|_p = \|x\|_p \leqslant \|T^{-1}\|\|T\|\|x\|_p = \|T^{-1}\|\|a\|_\infty \|x\|_p$$

de donde deducen que $\|a\|_\infty \geqslant r$ donde $r = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, y concluyen que $|a(n)| \geqslant r$. Sin comentarios.

No son pocos los que demuestran que, en la hipótesis de que $|a(n)| \geqslant r > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, T es inyectiva y sobreyectiva y para probar que la inversa es continua (no se dan cuenta de que esto ya lo han hecho en el punto anterior) hacen lo que sigue: $z \in \ell_p$, $z = T(x)$, $x = T^{-1}(z)$:

$$\|T^{-1}(z)\|_p = \|T^{-1}(T(x))\|_p = \|T(T^{-1}(x))\|_p \leqslant \|T\|\|T^{-1}x\|_p = \|T\|\|z\|_p$$

Supongo que has visto el error, si no es así mala cosa. Por cierto, tengo que recordar que para probar que una aplicación lineal es inyectiva lo que hay que hacer es probar que su núcleo se reduce a cero.

Hay errores más sutiles, como el siguiente. $z \in \ell_p$, $z = T(x)$, $x = T^{-1}(z)$:

$$|x(n)| = |[T^{-1}z](n)| = |[T^{-1}(T(x))](n)| \leqslant \|T^{-1}\||a(n)||x(n)|$$

De donde se deduce que $|a(n)| \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Pero esa forma de proceder no es correcta. ¿Sabes por qué?

Hay quien representa la sucesión constante igual a 1 en ℓ_∞ en la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}_n$ ¡Una serie convergente cuyo término general verifica que $\|\mathrm{e}_n\|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$! Recuerdo que los vectores unidad no son una base de Schauder en ℓ_∞. De hecho, deberíais saber que ℓ_∞ no es separable y, por tanto, no puede admitir una base de Schauder.

Lo anterior es suficiente como muestra de los errores más frecuentes y llamativos.